

1. Σ' έναν Ευκλείδειο χώρο  $E$  να εξετάσετε τότε ισχύει

α)  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ ,

β)  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

2. Έστω η απεικόνιση  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 5a_2b_2.$$

- Δείξτε ότι η προηγούμενη απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^2$ .
- Βρείτε τα μήκη των διανυσμάτων  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(-1, 2)$  με αυτό το εσωτερικό γινόμενο.
- Βρείτε όλα τα διανύσματα μήκους ένα με αυτό το εσωτερικό γινόμενο.

3. Στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^4$  εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου  $V$  που παράγεται από τα διανύσματα

$$\bar{u}_1 = (1, 1, 0, 0), \bar{u}_2 = (0, -1, 0, 2), \bar{u}_3 = (0, 0, -2, 1)$$

και να την συμπληρώσετε σε μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$ .

4. Στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}_3[x]$ , εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου που παράγεται από τα  $x, x^2, x^3$ .

5. Έστω

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0\}$$

και

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0, 2x + y - 3z = 0\}$$

υποχώροι του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$  εφοδιασμένου με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Να βρείτε

(α') Ορθοκανονικές βάσεις των  $V$  και  $W$ .

(β') Την προβολή της βάσης του  $W$  στον υποχώρο  $V$ .

(γ') Έστω  $\mathbb{R}_n[x]$  ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ  $n$  και  $r_0, r_1, \dots, r_n$  πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι η απεικόνιση  $\langle, \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}_n[x]$ .